

8 October 2010

1) Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo e avente derivata prima nulla per ogni punto dell'intervallo.

Allora $f(x)$ è costante

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x} - 2x$ 6

3) $\int e^{2x} \cos x \, dx$ 6

4) Derivata $y = \sqrt{\frac{\log(e^{\cos x})}{\sin x}}$ 6

5) $y = x(e^{2x^2} + 3)$ 4 studi funzione 5

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo e
avente derivate nulle in ogni punto di quell'intervallo,
allora $f(x)$ è costante.

(D.17)

Se $[a, b]$ il nostro intervallo.

$\forall x \in]a, b[$ posso applicare il T. d. Lagrange su $]a, x[$

$$\Rightarrow \exists c \in]a, x[\text{ T.c. } f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left. \begin{array}{l} \text{me x pres: } f'(c) = 0 \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Rightarrow \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(a) = 0 \quad \Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in \text{ell'intervallo}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ è costante.}$$

Qale

Teorema della derivata nulla

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia f una funzione continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$, e tale che

$$(1) \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Allora (mucche: questa è la tesi!) f è costante in $[a, b]$. $\square$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema faremo vedere che, nelle ipotesi fatte, si ha

$$(2) \quad f(x) = f(a) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Per ogni $x \in]a, b[$ applichiamo il Teorema di Lagrange (detto anche *Teorema del valor medio* o, in alcuni testi, *Teorema del valor medio per le derivate*) sull'intervallo $[a, x]$. Osserviamo che per ogni x la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema, che quindi ci dice che esisterà un $c \in]a, x[$ tale che

$$(3) \quad f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Usando (1) in (3) si ottiene immediatamente (2)

Osserviamo che la tesi del teorema può essere dimostrata in ipotesi più generali. Per esempio abbiamo il seguente risultato.

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Sia n un intero positivo, e sia

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \equiv b$$

una partizione dell'intervallo $[a, b]$ in n parti. Sia infine f una funzione continua su $[a, b]$, derivabile in $]x_{i-1}, x_i[$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e tale che

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad \forall i = 1, \dots, n$$

Allora (mucche: questa è la tesi!) f è costante in $[a, b]$. $\square$

Dimostrazione. Applicando il risultato precedente su ogni subintervallo $]x_{i-1}, x_i[$ otteniamo che f è costante su ogni subintervallo. La continuità di f su tutto $[a, b]$ implica allora che tutte queste costanti devono coincidere tra loro. Quindi abbiamo un'unica costante e la tesi è dimostrata.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x} - 2x = +\infty - \infty \quad \text{f. indet.} \Rightarrow \text{Rationaliz.}$$

Die f. rationalisierende $\sqrt{4x^2 - x} + 2x \Rightarrow$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x} - 2x \cdot \frac{\sqrt{4x^2 - x} + 2x}{\sqrt{4x^2 - x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{4x^2 - x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2(4 - \frac{1}{x})} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1 \times \sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2x} =$$

$\uparrow$
 das $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + 2} = \frac{-1}{\sqrt{4} + 2} =$$

$\downarrow$
 0

$$= \frac{-1}{2+2} = \left(-\frac{1}{4} \right) \checkmark$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \text{PER PART.}$$

$$\left\| \begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2x}}{2} \\ g(x) &= \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cos x - \int \frac{e^{2x}}{2} (-\sin x) dx = \frac{e^{2x}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x dx = \left\| \begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{e^{2x}}{2} \\ g(x) &= \sin x \\ \Rightarrow g'(x) &= \cos x \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x}}{2} \sin x - \int \frac{e^{2x}}{2} \cos x dx \right) =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \cos x + \frac{1}{4} e^{2x} \sin x - \frac{1}{4} \int e^{2x} \cos x dx$$

$$\Rightarrow \int e^{2x} \cos x dx + \frac{1}{4} \int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{e^{2x} \sin x}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{4} \int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{e^{2x} \sin x}{4} \Rightarrow$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{4}{5} \left(\frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{e^{2x} \sin x}{4} \right) = \frac{2}{5} \frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{1}{5} \frac{e^{2x} \sin x}{1} =$$

$$\boxed{= \frac{2}{5} e^{2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{2x} \sin x + C}$$

VERIFICA DERIVANDO IL RISULTATO

$$= \frac{2}{5} \left(e^{2x} \cdot 2 \cdot \cos x + e^{2x} (-\sin x) \right) + \frac{1}{5} \left(2 \cdot e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x \right) =$$

$$= \frac{4}{5} e^{2x} \cos x - \frac{2}{5} e^{2x} \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} \sin x + \frac{1}{5} e^{2x} \cos x = \frac{5}{5} e^{2x} \cos x = e^{2x} \cos x \checkmark$$

$$y = \sqrt{\frac{\log(\cos x)}{\sin x}}$$

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\log(\cos x)}{\sin x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \cdot \sin x - \log(\cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = (*)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin x}{\log(\cos x)}} \cdot \frac{-\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \log(\cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin x}{\log(\cos x)}} \cdot \left(-\frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\log(\cos x) \cdot \cos x}{\sin^2 x} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin x}{\log(\cos x)}} \cdot \left(-\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \log(\cos x) \right)$$

VERIFICATO

(*) Anche solo fin qui è sufficiente!

$$y = x \cdot (e^{2x^2} + 3)$$

Drinking

$$D:]-\infty; +\infty[$$

$$S = 4N$$

$$x \cdot (x^2 + 3) \geq 0 \quad \text{for } x \geq 0$$

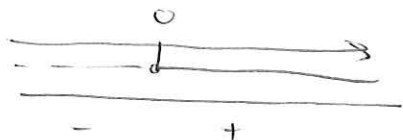
$$e^{2x^2} + 3 = 20$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall x$$

$\Rightarrow x^2 + 3 > 0$ a mindig pozitív

(offspring 3 and their parents)

gle (positive)



INT. ASS'

$$\text{Ass: } y : \begin{cases} y = x \cdot (e^{2x^2} + 3) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \cdot (e^{2 \cdot 0^2} + 3) = 0 \cdot (e^0 + 3) = 0 \cdot (1 + 3) = 0 \cdot 4 = 0$$

$P(0;0)$ int. on axis y

$$\text{Ans: } x \quad \begin{cases} y = x \cdot e^{2x^2+3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x \cdot e^{2x^2+3} = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+3=0 \end{cases}$$

more no solution
perché $e^{2x^2} \cdot x \text{ sempre } > 0$

$\Rightarrow x=0$
 $y=0$ $P(0;0)$ int. and x

Li t e r i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (e^{2x^2} + 3) = -\infty \cdot (e^{2(-\infty)^2} + 3) = -\infty \cdot (e^{+\infty} + 3) = -\infty \cdot +\infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{2x^2} + 3) = +\infty \cdot (e^{2(+\infty)^2} + 3) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

DER VATA PRITHI

$$y' = e^{2x^2} + 3 + x \left(e^{2x^2} \cdot 4x \right) = e^{2x^2} + 3 + 4x^2 e^{2x^2} = e^{2x^2} (1 + 4x^2) + 3$$

$x^2 \cdot (-1+4x^2) + 3 \geq 0$, sempre perché i fattori e gli addendi

$A \cdot B + C$
 $> 0 \quad > 0 \quad > 0 \quad > 0$ Some TTT sample > 0

$\underbrace{\quad}_{>0} \quad + \quad \underbrace{\quad}_{>0} = >0$

DERIVATA SECONDA

$$y'' = e^{2x^2} \cdot 4x (1 + 4x^2) + e^{2x^2} (8x) =$$

$$= e^{2x^2} \cdot 4x (1 + 4x^2) + 8x e^{2x^2} = e^{2x^2} \cdot 4x [1 + 4x^2 + 2] =$$

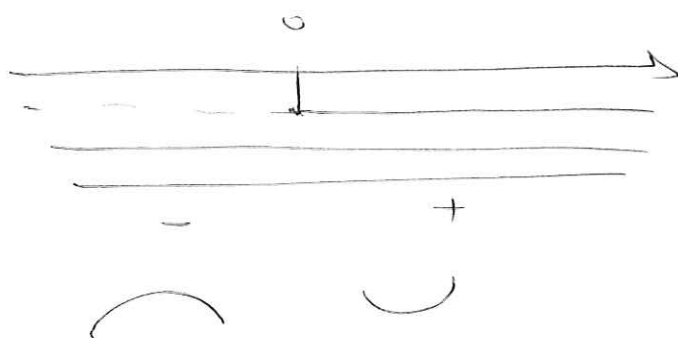
$$= 4x \cdot e^{2x^2} [4x^2 + 3]$$

$$A \cdot B \cdot C$$

A) $4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

B) $e^{2x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

C) $4x^2 + 3 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (è un trinomio di $\mathbb{R}$ preso con $\Delta < 0$)



$P(0; +\infty)$ è un f.o.m.

Ricerca as. obl: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{2x^2} + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x^2} + 3 = +\infty$ ~~Non obbl.~~

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e^{2x^2} + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x^2} + 3 = +\infty$ ~~Non obl.~~

